

Sortieralgorithmen

Greedy Sortieren:

Sortieren durch Auswahl, Einfügen und Austauschen

Divide-and-Conquer-Sortieren:

Quicksort und merge sort

Einleitung und Problemstellung

- Aufgabe: Sortiere Folge F aufsteigend (bzw. absteigend)
- Klassifikation elementarer Sortierverfahren
 - greedy
 - divide-and-conquer
- Implementierungen basieren auf Folgen als
 - Reihungen (*arrays*)
 - Listen (*linked lists*)
- Wichtige Gesichtspunkte:
 - Laufzeitkomplexität (asymptotisch)
 - Speicherplatz:
 - Bei Reihungen Operationen „in place“ bevorzugt
 - Bei jeder Rekursion Platz für Parameter und Variablen

- Aufgabe: Überführe unsortierte Folge F in sortierte Folge S .
- Implementierung von F , S als Listen
 - Vorteil: Elemente von F nach S bewegen durch Umketten (kein zusätzlicher Speicher)
 - Nachteil: kein wahlfreier Zugriff (random access)
- Implementierung von F , S als Reihung (array)
 - Vorteil: wahlfreier Zugriff
 - Nachteil: Schrumpfen von F und Wachsen von S zunächst nicht trivial, bei naiver Lösung zeit- und speicheraufwändig

Grundprinzipien elementarer Sortierverfahren: Greedy

- Sortieren durch Auswahl (*selection sort*)
 - Finde in F kleinstes Element und füge es an das Ende von S an.
- Sortieren durch Einfügen (*insertion sort*)
 - Nehme erstes Element aus F und füge es an richtiger Stelle in S ein.
- Sortieren durch Austauschen (*bubble sort*)
 - Gehe von links nach rechts durch F und vertausche benachbarte Elemente, falls falsch geordnet. Wiederhole den Schritt, bis Folge fertig sortiert.

Grundprinzipien elementarer Sortierverfahren: divide-and-conquer

- Quicksort
 - Teile F in Teilfolgen F_1, F_2 , wobei Elemente in F_1 kleiner als Elemente in F_2 sind.
 - Sortiere F_1, F_2 rekursiv
 - Füge sortierte Teilfolgen zusammen.
- Sortieren durch Mischen (*merge sort*)
 - Teile F in Teilfolgen F_1, F_2
 - Sortiere F_1, F_2 rekursiv
 - Bilde S durch iteratives Anhängen des kleineren der jeweils ersten Elemente aus F_1, F_2

Einordnung elementarer Sortierverfahren

	Implementierung array	Implementierung list
greedy	selection sort bubble sort	insertion sort
divide-and- conquer	quicksort	merge sort

Generische Implementierung von Sortierverfahren

- Algorithmen „parametrisiert“ durch Vergleichsoperator
- Interface **Comparable** im Paket **java.lang**
 - Aufruf Vergleichsmethode **a.compareTo(b)** liefert Zahl <0 , $=0$, >0 für $a < b$, $a = b$, $a > b$
- Muster für Objekte vom Referenztyp Comparable

```
public class MyObject
    implements Comparable {
    MyType data;
    public int compareTo (MyObject obj) {
        if („this.data < obj.data“) return -1;
        if („this.data = obj.data“) return 0;
        if („this.data > obj.data“) return 1;
    }
}
```

Generische Implementierung von Sortierverfahren

- Muster für Aufruf in Klassenmethode (hier bei Suchverfahren):

```
public static int binarySearch(  
    Comparable[] f,  
    Comparable a,  
    int l,  
    int r) {  
  
    int p = (l+r)/2;  
    int c = f[p].compareTo(a);  
    ...  
}
```


Selection sort: Sortieren durch Auswahl

- Prinzip: Solange es Elemente in der Folge F gibt, finde in F das kleinste Element und überführe es ans Ende der Folge S .

SelectSort (F)

// Die unsortierte Folge F wird in die sortierte Folge S überführt.

1. **Initialisiere:** $S = \emptyset$.
2. **Trivialfall:** if ($F == \emptyset$) return (S)
3. **Reduktion:** Minimum aus F nach S überführen.
 $a = \text{select}(F)$
 $S = \text{appendElem}(S, a);$
 $F = \text{deleteElem}(F, a);$
4. **Iteriere:** Weiter bei 2.

- Je nachdem, ob man mit **select** ein minimales oder maximales Element auswählt, erhält man eine schwach aufsteigend oder schwach absteigend sortierte Folge S .

- Sortiere $F_0 = (21, 5, 3, 1, 17)$
 - schwach aufsteigend
 - wähle jeweils Minimum in F

$$S_0 = ()$$

$$S_1 = (1)$$

$$S_2 = (1, 3)$$

$$S_3 = (1, 3, 5)$$

$$S_4 = (1, 3, 5, 17)$$

$$S_5 = (1, 3, 5, 17, 21)$$

$$F_0 = (21, 5, 3, \underline{1}, 17)$$

$$F_1 = (21, 5, \underline{3}, 17)$$

$$F_2 = (21, \underline{5}, 17)$$

$$F_3 = (21, \underline{17})$$

$$F_4 = (\underline{21})$$

$$F_5 = ()$$

Selection sort: Listenimplementierung

- `public class MyObject implements Comparable { . . . }`
- `public class Node { Object data; Node next; }`
- `public class OrderedList {
 private Node head;
 public OrderedList sort () { . . . }`

- `int findMin () { . . . }`
 - `F.findMin()` bestimmt Index des minimalen Elements von `OrderedList F`
- `void insertLast (int a)`
 - `S.insertLast(a)` fügt Element mit Index `a` an das Ende von `S` an
- `void deleteElem (int a)`
 - `F.deleteElem(a)` löscht Element mit Index `a` aus Liste `F`
- Aufwand jeweils = $O(n)$, wenn n = Anzahl der Objekte in Liste

Selection sort: Beispielimplementierung

```
public class OrderedList {
// ...
/**
 * Gibt Liste zurück, die die Elemente von this
 * in nicht absteigend sortierter Reihenfolge enthält.
 * Methode ist als selection sort implementiert.
 */
public OrderedList selectSort() {
    int min;
    OrderedList newList = new OrderedList();

    while( head != null ) // Liste ist nicht leer
    {
        min = findMin();
        newList.insertLast(min);
        deleteElem(min);
    }
    return (newList);
}
}
```

- Komplexität: n Iterationen der while-Schleife mit je $O(n)$ Aufwand ergibt insgesamt $O(n^2)$

Selection sort: Array Implementierung I

- Reihung $data[0], \dots, data[n-1]$ partitioniert in
 - sortierter Anfang S : $data[0], \dots, data[next-1]$
 - unsortierter Rest F : $data[next], \dots, data[n-1]$
- Finde Index min des minimalen Elementes in F
- Vertausche $data[next]$ mit $data[min]$
- Inkrementiere $next$ und iteriere solange $next < n$
- S wächst nach rechts, F schmilzt von links ab.

Selection sort: array Implementierung II

```
public class OrderedArray {  
    // ...  
    Comparable[] data;  
    void selectSort() {  
        int min; // Initialize  
        // Reduce F and grow S  
        for (int next = 0;  
            next < data.length-1;  
            next++) {  
            min = findMin(next,data.length-1);  
            swap(next,min);  
        }  
    }  
}
```

- `findMin(i,j)` berechnet Index des minimalen Elementes in `data[i], ..., data[j]`
- `swap(i,j)` vertauscht `data[i]` mit `data[j]`

Insertion sort: Sortieren durch Einfügen

- Nehme jeweils das erste Element aus F und füge es in S an der richtigen Stelle ein.

InsertSort(F)

// Die unsortierte Folge F wird in die sortierte Folge S überführt.

1. **Initialisiere:** $S = \emptyset$
2. **Trivialfall:** if ($F == \emptyset$) return(S).
3. **Reduziere F :** ein Element aus F sortiert nach S überführen.
 $a = \text{takeFirst}(F);$
 $S = \text{insertSorted}(S, a);$
4. **Iteriere:** Weiter bei 2.

- Zur Implementierung:
 - $F.\text{takeFirst}()$ bestimmt das erste Element aus F und löscht es anschließend aus F ,
 - $S.\text{insertSorted}(a)$ fügt Element a in S an der richtigen Stelle ein.

Insertion sort: Beispiel

$$S_0 = ()$$

$$S_1 = (21)$$

$$S_2 = (5, 21)$$

$$S_3 = (3, 5, 21)$$

$$S_4 = (1, 3, 5, 21)$$

$$S_5 = (1, 3, 5, 17, 21)$$

$$F_0 = (\underline{21}, 5, 3, 1, 17)$$

$$F_1 = (\underline{5}, 3, 1, 17)$$

$$F_2 = (\underline{3}, 1, 17)$$

$$F_3 = (\underline{1}, 17)$$

$$F_4 = (\underline{17})$$

$$F_5 = ()$$

Insertion sort: listenbasiert

```
public class OrderedList {
    // ...
    /**
     * Gibt Liste zurück, die die Elemente von this
     * in nicht absteigend sortierter Reihenfolge enthält.
     * Methode ist als insertion sort implementiert.
     */
    public OrderedList insertSort() {
        Comparable first;
        OrderedList resList;

        while( head!=null ) // Liste ist nicht leer
        {
            first = takeFirst();
            resList.insertSorted(first);
        }
        return resList;
    }
}
```

- Komplexität: $O(n^2)$

Insertion sort: arraybasiert

- Reihung $\text{data}[0], \dots, [n-1]$ partitioniert in
 - sortierter Anfang $S: \text{data}[0], \dots, \text{data}[\text{next}-1]$
 - unsortierter Rest $F: \text{data}[\text{next}], \dots, \text{data}[n-1]$
- Wähle Element $\text{data}[\text{next}]$ zum Einfügen
- Suche Einfügestelle absteigend von $\text{next}-1$ bis 0
- Schiebe dabei jedes zu große Element eine Position nach hinten bis Einfügestelle gefunden

bubble sort: Sortieren durch Austauschen

- Geht man von links nach rechts durch eine Folge F und vertauscht alle benachbarten Elemente, welche falsch geordnet sind, so steht am Schluss das größte Element von F am Ende der Folge.
- Das größte Element steigt dabei in der Folge wie eine Blase nach oben (*bubble sort*).
- Diesen Durchgang wiederholt man mit dem Rest der Folge F , bis die ganze Folge geordnet ist.
- S bildet sich also rechts von F und dehnt sich nach links aus.

$$F_0 = (21, 5, 3, 1, 17)$$

$$F_1 = (5, 3, 1, 17)$$

$$F_2 = (3, 1, 5)$$

$$F_3 = (1, 3)$$

$$F_4 = (1)$$

$$F_5 = ()$$

$$S_0 = ()$$

$$S_1 = (21)$$

$$S_2 = (17, 21)$$

$$S_3 = (5, 17, 21)$$

$$S_4 = (3, 5, 17, 21)$$

$$S_5 = (1, 3, 5, 17, 21)$$

Bubble sort: Arrayimplementierung

```
public class OrderedArray {
    Comparable[] data; // array of data
    // ...
    /**
     * Swaps the contents of data[i] and data[j].
     */
    void swap(int i, int j) {
        Comparable tmp = data[i];
        data[i]=data[j];
        data[j]=tmp;
    }
    /**
     * Sorts the array data in ascending order.
     */
    public void bubbleSort() {
        for(int j = data.length-1; j > 0; j--)
            for( int i = 1; i <= j; i++)
                // compare element at position j in sorted list
                // move greatest up
                if( data[i-1].compareTo(data[i]) > 0 )
                    swap(i-1,i);
    }
}
```

- Komplexität: $O(n^2)$

divide-and-conquer: Prinzip

Das abstrakte **Divide-and-Conquer-Prinzip** sieht folgendermaßen aus:

1. Teile das Problem (*divide*).
2. Löse die Teilprobleme (*conquer*).
3. Kombiniere die Teillösungen (*join*).

Beim Sortieren gibt es zwei Ausprägungen:

Hard split / easy join: Dabei wird die gesamte Arbeit beim Teilen des Problems verrichtet und die Kombination ist trivial, das heißt, F wird so in F_1 und F_2 partitioniert, daß $S = S_1 S_2$. Dieses Prinzip führt zum *Quicksort*-Algorithmus.

Easy split / hard join: Dabei ist die Aufteilung $F = F_1 F_2$ trivial und die ganze Arbeit liegt beim Zusammensetzen von S_1 und S_2 zu S . Dieses Prinzip führt zum *Mergesort*-Algorithmus.

- Einer der besten und meist genutzten Sortieralgorithmen
- Hauptvorteile:
 - sortiert Array in place
 - $O(n \log n)$ Komplexität im Mittel
 - $O(\log n)$ zusätzlicher Speicherplatz auf Stack
 - in Praxis schneller als andere Verfahren mit derselben asymptotischen Komplexität $O(n \log n)$

- Wähle und entferne Pivotelement p aus F
- Zerlege F in Teilfolgen F_1, F_2 so dass
 - $e_1 < p \leq e_2$ für alle e_1 in F_1, e_2 in F_2
 - Sortiere (rekursiv) F_1 zu S_1 und F_2 zu S_2
- Gesamtlösung ist $S_1 p S_2$

quicksort: Zerlegung in Teilfolgen

1. Für Zerlegung in F_1, F_2 ist p mit jedem Element von $F \setminus \{p\}$ zu vergleichen
2. Zerlegung soll durch Vertauschen von Elementen geschehen (kein Zusatzspeicher, in place!)
3. Wähle p als rechtes Randelement von F
4. Suche
$$i = \arg \min_i F[i] \geq p,$$
$$j = \arg \max_j F[j] < p$$
5. Paar $F[i], F[j]$ „steht falsch“, also vertausche $F[i]$ mit $F[j]$
6. Terminierung (ohne Vertauschen!), wenn erstmals $i > j$, sonst gehe zum Suchschritt 4
7. Vertausche p mit linkem Rand von F_2 (also mit $F[i]$)

quicksort: Wahl des Pivotelements

- Algorithmus ist schnell, wenn die Teilfolgen F_1, F_2 etwa gleich groß sind
- Im schlimmsten Fall ist eine Teilfolge immer leer (kann vorkommen, wenn Folge vorsortiert ist)
- Daher wählt man häufig p als Median von drei Stichproben, z. B. erstes, mittleres und letztes Element von F
- (b ist Median von a, b, c , wenn $a \leq b \leq c$)

(9, 7, 1, 6, 2, 3, 8, 4)
(9, 7, 1, 6, 2, 3, 8), (4)
(3, 7, 1, 6, 2, 9, 8), (4)
(3, 2, 1, 6, 7, 9, 8), (4)
(3, 2, 1, 4, 7, 9, 8, 6)

Nun ist die 4 am richtigen Platz angelangt. Danach geht es weiter mit dem rekursiven Aufruf auf den beiden Teilfolgen:

$$F_1 = (3, 2, 1) \text{ und } F_2 = (7, 9, 8, 6)$$

quick sort: Java Implementierung I/II

```
public class OrderedArray {
    Comparable[] data; // array of data
    // ...

    /**
     * Sorts data[l], data[l+1], ... , data[r]
     * in ascending order using the quicksort algorithm
     * Precondition: 0 <= l <= r < data.length.
     */
    public void quickSort(int l, int r) {
        // 0. Initialisiere
        int i = l, j = r-1;
        // 1. Check auf Trivialfall
        if (l >= r) return;
        // Initialisiere pivot
        Comparable pivot = data[r];
        // 2. Teile: Füge pivot an einem Platz p in F (=data),
        // ein, so dass F[i]<F[p] für l<=i<p und
        // F[j] >= F[p] für p<=j<=r.
    }
}
```

quicksort: Java Implementierung II

```
// 2.1 Finde äusserstes ungeordnetes Paar F[i], F[j],  
//   i<j, mit F[i] >= pivot und F[j] < pivot und  
//   F[s] < pivot für l<=s<i und F[s] >= pivot  
//   für j<s<=r.  
while( data[i].compareTo(pivot) < 0 ) i++;  
while( j>=l && data[j].compareTo(pivot) >= 0 ) j--;  
  
// 2.2 Ordne Paar; finde nächstes ungeordnetes Paar.  
while( i < j ) {  
    // i<j impliziert j>=l,  
    // daher F[j]<pivot und F[i]>=pivot.  
    swap(i,j);  
    while( data[i].compareTo(pivot) < 0 ) i++;  
    while( data[j].compareTo(pivot) >= 0 ) j--;  
}  
// 2.3 Endgültiger Platz für pivot ist i: es gilt i>j  
//   (und nicht nur i>=j, denn i=j impliziert  
//   pivot<=F[i]<pivot) und F[k]<pivot für 0<=k<i;  
//   F[k]>=pivot für j<k<=r; wegen i>j folgt  
//   F[k]>=pivot für i<=k<=r.  
swap(i,r);  
  
// 3. Herrsche: Sortiere links und rechts  
//   vom Ausgangspunkt.  
quickSort(l, i-1);  
quickSort(i+1, r);  
}
```

quicksort: Komplexität I

- Anzahl der Vergleiche $T(n)$, $n =$ Länge der Eingabe
- Auf jeder Rekursionsebene sind $O(n)$ Vergleiche von Datenelementen zu machen (genaue Zahl hängt ab von der Anzahl der swap-Operationen)
- Maximale Anzahl von Rekursionsebenen ist n (alle Folgeelemente sind kleiner als Pivotelement)
- Im schlimmsten Fall also $O(n^2)$ Vergleiche

- Im besten Fall sind Teilfolgen gleich groß und ungefähre Rechnung für $n = 2^k$ ergibt

$$\begin{aligned}T_{\text{best}}(n) &= T_{\text{best}}(2^k) = n + 2 \cdot T_{\text{best}}(2^{k-1}) \\&= n + 2 \cdot n/2 + 4 \cdot T_{\text{best}}(2^{k-2}) = n + n + 4 \cdot T_{\text{best}}(2^{k-2}) \\&= \dots = n + n + \dots + n + 2^k \cdot T_{\text{best}}(1) \\&= k \cdot n + 2^k \cdot T_{\text{best}}(1) = k \cdot n + n \cdot c \\&= n \log_2 n + cn \in O(n \log n)\end{aligned}$$

- Komplexität im Mittel ebenfalls $O(n \log n)$.
(Beweis siehe z.B. in Ottmann/Widmayer)

merge sort: Sortieren durch Mischen

- Sehr gut geeignet für Folgen in Listenform
- Für Arrays problematisch ($O(n)$ zusätzlicher Speicherplatz)
- Komplexität auch im schlimmsten Fall $O(n \log n)$
- Bei **merge sort** wird die Folge F einfach in zwei gleich große Hälften F_1 und F_2 geteilt, $F = F_1 F_2$.
- Teilfolgen F_1 und F_2 werden rekursiv sortiert mit Ergebnis S_1 und S_2 .
- Die sortierten Folgen S_1 und S_2 werden dann in einem linearen Durchgang zur sortierten Folge S *gemischt*, indem man das jeweils kleinste (bzw. größte) Element von S_1 und S_2 an S anfügt.

(3, 2, 1, 7, 3, 4, 9, 2)
(3, 2, 1, 7), (3, 4, 9, 2)
(3, 2), (1, 7), (3, 4), (9, 2)
(3), (2), (1), (7), (3), (4), (9), (2)
(2, 3), (1, 7), (3, 4) (2, 9)
(1, 2, 3, 7) (2, 3, 4, 9)
(1, 2, 2, 3, 3, 4, 7, 9)

merge sort: Java Implementierung I

```
public class OrderedList {
    OrderedNode head;
    int length;
    // ...

    /**
     * Sorts this list in non-descending order.
     * Works destructively on the encapsulated
     * node chain starting with head.
     * Implemented as merge sort.
     */
    public void mergeSort() {
        OrderedList aList, bList; // the divided lists
        OrderedNode aChain; // start of first node chain
        OrderedNode bChain; // start of second node chain
        OrderedNode tmp; // working node for split

        // trivial cases
        if( (head==null) || // empty list
            (head.next == null) ) // one element list
            return;
```

merge sort: Java Implementierung II

```
// divide: split the list in two parts
aChain = head;
tmp = head; // init working node for split
// advance half of the list
for (int i=0; i < (length-1) / 2; i++)
    tmp=tmp.next;

// cut chain into aChain and bChain
bChain=tmp.next;
tmp.next=null;

// encapsulate the two node chains in two lists
aList = new OrderedList();
aList.head=aChain;
aList.length=length/2;
bList = new OrderedList();
bList.head=bChain;
bList.length=length - alist.length;

// conquer: recursion
aList.mergeSort(); bList.mergeSort();
// join: merge
merge(aList, bList);
}
```

merge sort: Anmerkungen

Aus Gründen der Übersichtlichkeit erzeugt dieses Programm im Divide-Schritt jeweils gekapselte Zwischenlisten vom Typ **OrderedList**. In der Praxis würde man hierauf verzichten und rein auf Knotenketten arbeiten, da insgesamt $O(n)$ Objekte vom Typ **OrderedList** erzeugt und wieder vernichtet werden (maximal $O(\log n)$ davon sind gleichzeitig aktiv).

merge sort: Komplexität

- Zähle nur Vergleiche bei Länge $n = 2^k$
- Split: $n/2$ Schritte (bewege **Node tmp** in die Mitte)
- Merge: n Vergleiche
- Rekursionsebenen: $\log_2 n$
- Gesamtkomplexität: $O(n \log_2 n)$