Relation (Mathematik)

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Dieser Artikel enthält mathematische Symbole. Diese werden in der Tabelle mit mathematischen Symbolen erläutert.

Eine **Relation** ist eine Beziehung zwischen Dingen. Eine Relation im Sinne der Mathematik ist eine Beziehung, die zwischen gewissen Dingen gegeben, zwischen anderen Dingen nicht gegeben sein kann - es gibt also keine Zwischenabstufungen; Dinge können nicht "ein bisschen" zueinander in Relation stehen.

Diese Festlegung ermöglicht eine einfache mengentheoretische Definition des Begriffs Relation: eine Relation R ist eine Menge von Tupeln. Dinge, die in der Relation R zueinander stehen, bilden ein Tupel, das Element von R ist.

Wenn nicht ausdrücklich anderes angegeben ist, versteht man unter einer Relation eine "zweistellige" oder "binäre" Relation, also eine Beziehung zwischen je zwei Dingen. Die Tupel sind in diesem Fall Paare. Die Elemente eines Tupels (a, b) können aus verschiedenen Grundmengen A und B stammen; die Relation heißt dann "Relation *zwischen* den Mengen A und B". Wenn die Grundmengen übereinstimmen, A=B, heißt die Relation auch "Relation *in* der Menge A". Wichtige Spezialfälle, zum Beispiel Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen sind Relation *in* einer Menge.

Inhaltsverzeichnis

Definition

Die vorstehenden Überlegungen erlauben uns nun folgende formale Definition: eine binäre Relation R ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen A und B:

$$R \subseteq A \times B \quad \text{mit} \quad A \times B := \{(a,b) \mid (a \in A) \ \wedge (\ b \in B)\}$$

Allgemeiner ist eine n-stellige Relation eine Teilmenge des kartesischen Produkts von n Mengen $A_1, ..., A_n$.

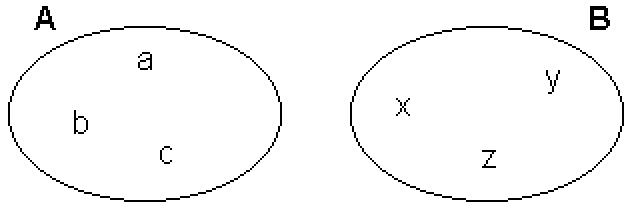
Erläuterungen

Das kartesische Produkt ist die Menge aller geordneten Paare von a und b, wobei a irgendein Element aus der Menge A und b eines aus B darstellt. Bei dem geordneten Paar ist die Reihenfolge wichtig, d.h. (a,b) ist etwas anderes als (b,a). Im Gegensatz zu der ungeordneten Menge {a,b}, die identisch ist mit {b,a}.

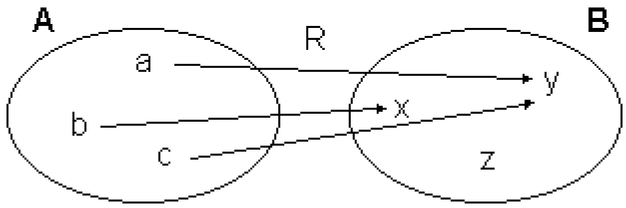
Für "$(a, b) \in R$" schreibt man meist "$a\ R\ b$". Sehr oft ist dabei die Menge $A = B$, also $R \subseteq A \times A$.

Relationen können als Funktionen gesehen werden, deren Definitionsmenge das kartesische Produkt der Mengen ist und deren Wertemenge lediglich *wahr* und *falsch* umfasst. Man könnte also auch $R(a,b)$ für den Ausdruck der Relation schreiben. Umgekehrt kann man aber auch eine Funktion als eine spezielle (nämlich als eine linkstotale und rechtseindeutige) Relation auffassen (siehe unten). Ob man Funktionen als spezielle Relationen oder Relationen als spezielle Funktionen erklärt, bleibt willkürlich.

Beispiel



$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{ (a,x) , (a,y) , (a,z) , (b,x) , (b,y) , (b,z) , (c,x) , (c,y) , (c,z) \}$



$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{ (a,x) , \underline{(a,y)} , (a,z) , \underline{(b,x)} , (b,y) , (b,z) , (c,x) , \underline{(c,y)} , (c,z) \}$

$R = \{ (a,y) , (b,x) , (c,y) \}$

Eigenschaften

Die in der folgenden Tabelle gegebenen Beispiele beziehen sich bei Verwendung von Gleichheitszeichen "=", Kleinerzeichen "<" und Kleinergleich-Zeichen "≤" auf die gewöhnliche Anordnung reeller Zahlen.

Wichtige Eigenschaften von binären Relationen sind:

Die Relation heißt	**wenn gilt**	**und das bedeutet**
reflexiv (*A* = *B*)	$\forall a \in A: \ (a,a) \in R$	Jedes Element steht in Relation zu sich selbst, z.B. ist stets $a \leq a$
irreflexiv (*A* = *B*)	$\forall a \in A: \ (a,a) \notin R$	Kein Element steht in Relation zu sich selbst, z.B. gilt $a<a$ für kein *a*
symmetrisch (*A* = *B*)	$\forall (a,b) \in A^2 : (a,b) \in R \ \Rightarrow \ (b,a) \in R$	Die Relation ist ungerichtet, z.B. folgt aus $a=b$ stets $b=a$
asymmetrisch (*A* = *B*)	$\forall (a,b) \in A^2 : (a,b) \in R \ \Rightarrow \ (b,a) \notin R$	Es gibt keine zwei Elemente, die in beiden Richtungen in Relation stehen, z.B. folgt aus $a<b$ stets, dass $b<a$ nicht gilt
antisymmetrisch *bzw.* identitiv (*A* = *B*)	$\forall (a,b) \in A^2 : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \ \Rightarrow \ a = b$	Es gibt keine zwei *verschiedenen* Elemente, die in beiden Richtungen in Relation stehen, z.B. folgt aus $a \leq b$ und $b \leq a$ stets $a=b$

transitiv (*A* = *B*)	$\forall a,b,c \in A : (a,b) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$	Anfang und Ende einer verbundenen Sequenz sind verbunden, z.B. folgt aus $a<b$ und $b<c$ stets $a<c$
intransitiv	$\exists a,b,c \in A : (a,b) \in R \land (b,c) \in R \land (a,c) \notin R$	nicht bei jeder verbundenen Sequenz sind Anfang und Ende verbunden
antitransitiv	$\forall a,b,c \in A : (a,b) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \notin R$	bei keiner verbundenen Sequenz sind Anfang und Ende verbunden
drittengleich (rechtskomparativ)	$\forall a,b,c \in A : (a,c) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$	Stehen zwei Elemente jeweils zu einem dritten in Relation, dann stehen sie auch zueinander in Relation, z.B. folgt aus a=c und b=c auch a=b. Zu beachten ist, dass diese Forderung nicht äquivalent zur Transitivität ist.
drittengleich (linkskomparativ)	$\forall a,b,c \in A : (c,a) \in R \land (c,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$	Siehe oben.
total *bzw.* linear (*A* = *B*)	$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \lor (b,a) \in R$	Je zwei Elemente stehen in Relation, z.B. gilt stets $a \le b$ oder $b \le a$
trichotomisch	$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \dot\lor (b,a) \in R \dot\lor a = b$	Je zwei Elemente sind entweder gleich, oder stehen in genau einer Art und Weise zueinander in Relation.
linkstotal	$\forall a \in A : \exists b \in B : (a,b) \in R$	Jedes El. aus *A* hat einen Partner in *B*
rechtstotal	$\forall b \in B : \exists a \in A : (a,b) \in R$	Jedes El. aus *B* hat einen Partner in *A*
linkseindeutig	$\forall a,c \in A : \forall b \in B : (a,b) \in R \land (c,b) \in R \Rightarrow a = c$	Kein El. aus *B* hat mehr als einen Partner in *A*
rechtseindeutig	$\forall a \in A : \forall b,c \in B : (a,b) \in R \land (a,c) \in R \Rightarrow b = c$	Kein El. aus *A* hat mehr als einen Partner in *B*
alternativ (*A* = *B*)	$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \notin R$	Es gilt stets genau eine der Relationen a R b oder b R a

Relationen werden oft auch mit N:1 oder N:N und dergleichen charakterisiert. Dabei steht 1, wenn es rechts steht, für linkstotal und rechtseindeutig (und umgekehrt). N steht meistens für gar nichts. Manchmal wird auch 0 statt 1 verwendet, um die Totalität wegzulassen.

Klassen von Relationen

Wichtige Klassen von Relationen:

- Eine Äquivalenzrelation ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.
- Eine Halbordnung ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.
- Eine Funktion ist linkstotal und rechtseindeutig (d.h. N:1).
- Eine *Verträglichkeitsrelation* ist reflexiv und symmetrisch. (Nicht notwendig transitiv.)
- Eine *Quasiordnung* oder *Präordnung* ist transitiv und reflexiv. (Nicht notwendig symmetrisch oder antisymmetrisch.)
- Eine lineare Ordnung oder *totale Ordnung* ist eine Halbordnung, die zusätzlich total (linear) ist.
- Eine *strenge Halbordnung* oder *Striktordnung* ist transitiv und irreflexiv.
- Eine *lineare Striktordnung* oder *strenge Totalordnung* ist eine trichotomische Striktordnung.
  Achtung: eine lineare Striktordnung ist nicht linear, eine strenge Totalordnung nicht total!
- Eine Wohlordnung ist eine lineare Ordnung, bei der jede nichtleere Teilmenge von A ein kleinstes Element besitzt.

Alternative Sprechweisen

- Zu *linkseindeutig* sagt man auch *injektiv* oder *voreindeutig*.
- Zu *linkstotal* sagt man auch *vordefiniert*.
- Zu *rechtseindeutig* sagt man auch *nacheindeutig*.
- Zu *rechtstotal* sagt man auch *surjektiv* oder *nachdefiniert*.

Siehe auch

Operationen auf ganzen Relationen werden in der relationalen Algebra behandelt.
In der Informatik sind Relationen für relationale Datenbanken wichtig.

Einordnung: Mengenlehre | Logik