Zeige $O(a \cdot f) = O(f)$ wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+}$, $a > 0$
Hinweis: Die O-Notation ist so definiert:
$O(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} c \in \mathbb{R}^{+} : g(n) \leq c \cdot f(n) \forall n \geq n_0\}$

Wir gliedern den Beweris in 2 Teile:

a) Zeige $O(a \cdot f) \subseteq O(f)$.
   in Worten: Zeige $O(a \cdot f)$ ist Teilmenge oder gleich $O(f)$

Sei $g(n) \in O(a \cdot f)$ ein beliebiges, aber festes Element aus $O(a \cdot f)$. Dann gilt $\exists n_0 \in \mathbb{N} c > 0 : g(n) \leq c \cdot a \cdot f(n) \forall n \geq n_0$.
in Worten: es gibt c und n0 gibt, so dass $g(n) \leq c \cdot a \cdot f(n)$ für alle n>=n0.
Wegen $c > 0, a > 0 \Rightarrow ca > 0$. Setze $c' = ca$ und es gilt: $g(n) \leq c' \cdot f(n) \forall n \geq n_0$. Nach der Definition der O-Notation ist dann $g(n) \in O(f)$. Das gilt für beliebiges $g(n) \in O(a \cdot f)$, also für jedes. Daraus folgt sofort die Behauptung.

b Zeige $O(f) \subseteq O(a \cdot f)$
(in Worten: $O(f)$ ist Teilmenge oder gleich $O(a \cdot f)$).
Sei $g(n) \in O(f)$ ein beliebiges Element aus der Menge $O(f)$. Nach der Definition der O-Notation gilt dann: $\exists n_0 \in \mathbb{N} c > 0 : g(n) \leq c \cdot f(n) \forall n \geq n_0$. Wegen $c > 0, a > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$, setze $c' = \frac{c}{a}$ und es gilt:
$g(n) \leq c \cdot f(n) = \frac{ca}{a} \cdot f(n) = c' \cdot a \cdot f(n) \forall n \geq n_0$. Also ist nach Definition der O-Notation $g(n) \in O(a \cdot f)$. Da g ein beliebiges Element aus O(f) ist, gilt dies für alle Elemente, also ist $O(f) \subseteq O(a \cdot f)$.

a) und b) zusammen ergeben $O(a \cdot f) = O(f)$.